DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ SOSYAL BİLİMLER DERGİSİ
DUMLUPINAR UNIVERSITY JOURNAL OF SOCIAL SCIENCES
E-ISSN: 2587-005X https://dergipark.org.tr/tr/pub/dpusbe
Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 87(Özel Sayı), 45-56; 2025
DOI: 10.51290/dpusbe.1755890

Araştırma Makalesi / Research Article

İSLAM DÜNYASINDA DOST SAYILAR VE ABDULLAH KÜTÂHÎ'NİN FERÂİDU'L-FUNÛN ESERİNDEKİ YANSIMALARI*

Zehra BİLGİN[1]

Öz
Bu makale, sayıların tarihsel gelişiminde özel bir yeri olan dost sayıların (amicable numbers) İslam dünyasındaki izini sürmekte ve Osmanlı âlimi Abdullah Kütâhî'nin *Feraidu'l-funûn* adlı ansiklopedik eserinde bu konuya nasıl yer verdiğini incelemektedir. Dost sayılar, her birinin pozitif bölenleri toplamı diğerine eşit olan sayı çiftleridir. Bu sayılar, Pithagorasçı düşüncede dostluk, birlik ve ahenk gibi değerlerle ilişkilendirilmiş; tılsımsal ve sembolik anlamlar kazanmıştır.
Makale, dokuzuncu yüzyılda yaşayan Sâbit bin Kurre'nin bu sayı türüne dair ortaya koyduğu teoremi ayrıntılı biçimde ele alır. Kurre, dost sayıların sistematik üretimine yönelik matematiksel bir yöntem sunmuş ve bunu ispatlamak için çeşitli önermeler kullanmıştır. Bu teorem, klasik Yunan matematiğinin ötesine geçen bir soyutlama düzeyi sunar.
Abdullah Kütâhî'nin eserinde dost sayılar bölümü ise bu teorik çerçeveyi İbn Sînâ'nın *eş-Şifâ* adlı yapıtından da etkilenerek aktarır. Kütâhî, dost sayıların sadece matematiksel değil, aynı zamanda mistik, folklorik ve kültürel boyutlarını da ele alır. *Feraidu'l-funûn*'da teoremle birlikte bazı önermeler sunulmakta, ancak tam bir ispatına yer verilmemektedir.
Bu çalışma, İslam entelektüel tarihinde matematiksel kuram ile kültürel yorum arasındaki etkileşimi vurgulamakta; matematiksel fikirlerin yerleştiği daha geniş felsefi ve sembolik çerçevelere dair önemli bir bakış sunmaktadır.
Anahtar Kelimeler: Dost sayılar, Ferâidu'l-funûn, Abdullah Kütâhî, Matematik tarihi, İslam bilim tarihi

AMICABLE NUMBERS IN THE ISLAMIC SCIENTIFIC TRADITION AND THEIR REPRESENTATION IN FARĀID AL-FUNŪN BY 'ABD ALLĀH KUTĀHĪ

Abstract
This article traces the historical development of amicable numbers, a class of numbers in number theory, in the Islamic world, with a particular focus on how this topic is presented in *Farāid al-funūn*, by the eighteenth-century Ottoman scholar 'Abd Allāh Kutāhī (d. 1784). Amicable numbers are pairs of distinct positive integers such that the sum of the proper divisors of each number equals the other. The Pythagorean philosophy associated these numbers with friendship, harmony, and mystical symbolism.
The article examines the significant theoretical contribution of the ninth-century polymath Thābit ibn Qurra, who proposed a general theorem to generate amicable numbers. His method, which employs a set of auxiliary propositions, represents a level of mathematical abstraction beyond that of classical Greek arithmetic.
Kutâhî's account in *Farāid al-funūn* draws upon both Ibn Sīnā's *al-Shifāʾ* and Thābit ibn Qurra's risalah. While Kutâhî presents the theorem and some related propositions, he does not provide the full proof. He addresses not only the mathematical structure of amicable numbers but also their mystical, folkloric and cultural significance.
This work highlights the interplay between mathematical theory and cultural interpretation in Islamic intellectual history, offering insights into the broader philosophical and symbolic frameworks within which mathematical ideas were embedded.
Keywords: Amicable numbers, Farâid al-funûn, 'Abd Allāh Kutāhī, History of mathematics, History of science in Islam.

---

* Bu çalışmanın ilk taslağı olan "Sayılar Bize Ne Söyler? Kütâhî'nin Ferâidu'l-funûn'unda Sayılar Teorisi Uygulamaları" adlı bildiri Kütahya Dumlupınar Üniversitesi ve İstanbul Medeniyet Üniversitesi Bilim Tarihi Enstitüsü işbirliğinde 10.04.2025 tarihinde Kütahya'da düzenlenen Anadolu'da İlk Bilimler Ansiklopedisi: Abdullah Kütâhî ve Ferâidu'l-funûn Sempozyumu'nda sunulmuştur. Yazar, değerli yorumları sebebiyle meslektaşlarına teşekkür eder.
[1] Dr. Öğr. Üyesi, İstanbul Medeniyet Üniversitesi Bilim Tarihi Enstitüsü, zehrabilgin.zb@gmail.com,
ORCID: 0000-0002-6147-3018
Başvuru Tarihi (Received): 01.08.2025 **Kabul Tarihi** (Accepted): 28.11.2025

Giriş

Bu makalede sayılar teorisinde dost sayılar olarak bilinen sayı türünün antik dönemlerden başlayarak İslam dünyasına uzanan tarihi incelenecek ve on sekizinci yüzyıl Osmanlı âlimlerinden Abdullah Kütâhî'nin (ö.1199/1784) *Feraidu'l-funûn* adlı ansiklopedik eserinde dost sayılarla ilgili bölümde konunun ele alınışı tartışılacaktır.

Dost sayılar (arkadaş sayılar; Ar. aʿdâdu'l-mutehâbbe; İng. amicable numbers) olarak bilinen birbirinden farklı pozitif tam sayı çiftlerinde sayılardan her birinin bölenleri toplamı diğer sayıya eşittir. En küçük dost sayı çifti $(220, 284)$ tür.

220'nin bölenleri toplandığında 284 eder, aynı şekilde 284'ün bölenleri toplandığında 220 eder.

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$$

En küçük dost sayı çifti olan 220 ve 284 antik çağlardan beri biliniyordu. Her ne kadar Pithagoras'a (M.Ö. 6.-5. yüzyıl) atfedilse de bu sayı çiftini ilk kez kayda geçiren ve Phithagorasçıların bildiğini bize söyleyen Iamblichus'tur (ö. 325):

> "Bazı kimseler, hatalı bir kanaate kapılarak, Pithagorasçıların mükemmel sayıyı "aşk" olarak adlandırdıklarını düşündüler; çünkü bu sayıda farklı unsurların birleşimi ve bir tür yakınlık (ünsiyet) bulunduğunu sandılar. Zira onlar, bunun aksine, bazı diğer sayılara "arkadaş sayılar" derler; bu isimlendirmede sayılara birtakım erdemler ve toplumsal nitelikler atfedilir. Örnek olarak 284 ile 220 böyledir; çünkü her birinin parçaları (bölenleri), diğeriyle dostluk kuralına göre birbirini meydana getirme gücüne sahiptir. Pithagoras da bunu böyle ifade etmiştir. Ona "arkadaş kimdir?" diye sorulduğunda, "başka bir ben" diye cevap vermiştir; bu anlayış, bu sayılar üzerinden de gösterilmiştir. Aristoteles de *Etik* adlı eserinde dostluğu bu şekilde tanımlamıştır." (Dickson, 1919, s.38)

220 Ve 284 çifti yüzyıllar boyunca bilinen tek dost sayı çifti olmuştur. Pithagorasçı mistik düşüncenin etkisiyle çeşitli kültürlerde tılsımların bir aracı haline gelerek iki kişi arasında dostluğu, muhabbeti güçlendireceği, iki şey arasındaki bağları kuvvetlendireceği var sayılmıştır.

Dost sayılara ilişkin ilk teorik çalışma dokuzuncu yüzyılın çok yönlü âlimi Sâbit bin Kurre'nin (ö. 901) kendi adıyla anılan teoremidir. Bu teorem dost sayıları üretmek için genel bir kural ortaya koyar.

Sâbit bin Kurre Teoremi: $n > 0$, $p_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ olmak üzere

i. $2^{n+1} - 1$ asal sayı

ii. p_n ve p_{n+1} asal sayı

iii. q_n asal sayı

ise $2^n p_n p_{n+1}$ ile $2^n\, q_n$ dost sayılardır (Qurra, 1977, s. 55).

Örnek olarak; $n = 2$ alındığında, $2^{2+1} - 1 = 7$ asal sayı olur. Ayrıca $p_2 = 5$, $p_3 = 11$ ve q_2 de asal sayılardır. Bu durumda, $2^2 p_2 p_{2+1} = 4 \cdot 5 \cdot 11 = 220$ ve $2^2\, q_2 = 4 \cdot 71 = 284$ sayıları dost sayılardır.

Sâbit b. Kurre'nin dost sayılara dair makalesinin iki nüshası bulunur (Kurre, Ayasofya 4830/6; BnF 2547). A. S. Saidan biri Paris'te biri İstanbul'da bulunan bu iki nüshaya dayanarak eserin bir neşrini yapmıştır (Qurra, 1977). Daha sonra Roshdi Rashed ve Christian Houzel (2009) de Fransızca bir makale kaleme alarak eserin ikinci bir neşrini makalesine eklemiştir.

Giriş kısmında Sâbit b. Kurre mükemmel ve dost sayıların Pithagoras ve diğer bazı Yunanlı âlimler tarafından çalışıldığından bahsederek, mükemmel sayılar konusunda Nikomakhos (M.Ö. 4. yüzyıl) ve Eukleides'in (M.Ö. 4. yüzyıl) isimlerini zikreder. Ne var ki Sâbit'e göre her iki isim de dost sayılar üzerine çalışmamışlardır.

> "Zihnime onlar (yani dost sayılar) geldiğinden ve onlar için bir ispat elde ettiğimden dolayı, bu kuralı ispatlamadan yazmak istemedim; çünkü onlar bu şekilde anılmışlardır. (Yani Eukleides ve Nikomakhos tarafından ihmal edilmişlerdir.)" (Qurra, 1977, s.33)

Sâbit bin Kurre Teoremi Antik Yunan dönemindeki sayı kuramı bilgilerini aşan bir derinliğe sahiptir. Sadece Eukleides'in *Elemanlar*'ının 7-10. kitaplarındaki aritmetik ile değil Nikomakhos'un *Aritmetiğe Giriş* adlı eseri gibi felsefi yönelimli aritmetik eserleriyle de ilişkilidir (Brentjes & Hogendijk, 1989, s. 374).

İslam matematik literatüründe dost sayılar hem mistik hem de teorik yönüyle yer bulsa da $(220, 284)$ çifti haricinde yeni bir çiftin bulunması için 14. yüzyılı beklemek gerekti. Kemâleddin Fârisî (ö. 1319), Sâbit bin Kurre'nin teoremini $n = 4$ için uygulayarak $(17296, 18416)$ çiftini hesapladı. Hogendijk'a (1985) göre ise Sâbit bin Kurre bu sayı çiftini zaten biliyordu. 17. yüzyılda ise Muhammed Bâkır el-Yezdî (ö. 1637'den sonra), $n = 7$ değerini kullanarak $(9363584, 9437056)$ çiftini buldu. Bu iki çift de 17. yüzyılın ortalarında sırasıyla Pierre de Fermat (ö. 1665) ve René Descartes (ö. 1650) tarafından yeniden keşfedilecekti.

Kemâleddin Fârisî, Sâbit b. Kurre Teoremi'ni yeniden ve farklı bir yolla ispatlama girişimi sırasında sayılar teorisinin önemli sonuçlarından bazılarını da ispatladı. Bunlar arasında aritmetiğin temel teoremi[2] en meşhuru olmakla birlikte bir sayının bölenleri, temel aritmetik fonksiyonlar ve kombinatorik analiz ile ilgili bazı sonuçlar da sayılabilir (Rashed, 1994, s. 287-307).

1. *Feraidu'l-funûn*'da Dost Sayılar Bölümü

Abdullah Kütâhî'nin *Feraidu'l-funûn* adlı eseri, müellifin 120 ayrı disiplini bir araya getirdiği ansiklopedik bir eserdir. 9 cilt olarak tasarlanmış olsa da günümüzde sadece 3, 4, 6, 7 ve 9. ciltleri mevcuttur. Matematik bilimleri içeren altıncı ciltte canlı bilimleri ve coğrafya bölümleri de bulunur.

Dost sayılar bölümü altıncı ciltte 184a-187b arasındaki varaklarda incelenir (Kütâhî, VI, 06 Mil Yz A 1339/3). Dört varaklık bu bölümün giriş kısmında dost sayıların mistik ve folklorik özellikleri çeşitli efsanelerle harmanlanarak uzunca anlatılır. Ardından konunun teorik özelliklerine geçilir.

Kütâhî dost sayıların teorisini anlatmak için İbn Sinâ'nın *Şifâ*'sından ve Sâbit b. Kurre'nin bu konudaki risâlesinden faydalanmıştır.

Müellif meseleye dost sayıların ilk örneğini açıklayarak başlar:

"وأما طريق استخراج الأعداد المتحابة وهي الأعداد التي يتركب كل منهما من أجزاء صاحبه كما يتركب صاحبه من أجزائه، مثل مأتي وعشرين من مأتي وأربعة وثمانين. فان مأتي وأربعة وثمانين نصفها وهو 142 ، وله ربع وهو71 ، وله جزء من أحد و سبعين فهو4 ، ولو وجزء من مأته وإثنين وأربعين وهو 2 ، وله جزء من مأتي وأربعة وثمانين وهو1 . وإذا إجتمعت هذه الأجزاء تكون مأتي وعشرين. أما اجزاء مأتي وعشرين له نصف وهو 110 ، وله

[2] Aritmetiğin Temel Teoremi: 1'den büyük her tam sayı asal çarpanların çarpımı şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

الربع 55 ، وله الخمس فهو 44 ، وله العشر 22 ، وله جزء من أحد عشر وهو 2 ، وله جزء من عشرين 11 ، وله جزء من إثنين وعشرين وهو 10 ، وله جزء من أريعة واربعين 5 ، وله جزء من خمسة و خمسين 4 ، وله جزء من مأة وعشرة 2 ، وله جزء مأتي وعشرين وهو1. فإذا اجتمعت هذه الأجزاء تكون مأتان وأربعة و ثمانون وليس لواحد منهما من الأجزاء غير ما ذكرنا."

> "Dost sayıları çıkartma yöntemi ise – ki bunlar, her biri diğerinin tam bölenlerinden oluşan sayılardır; tıpkı birinin, diğerinin parçalarından oluşması gibi – mesela 220 ile 284 sayıları böyledir. Çünkü 284'ün yarısı 142'dir, dörtte biri 71'dir, yetmiş birde biri 4'tür, yüz kırk ikide biri 2'dir, ayrıca iki yüz seksen dörtte biri 1'dir. Bu bölenler toplandığında iki yüz yirmi eder."
>
> "Öte yandan, iki yüz yirmi sayısının bölenleri ise şunlardır: Yarısı 110, dörtte biri 55, beşte biri 44, onda biri 22, on birde biri 2, yirmide biri 11, yirmi ikide biri 10, kırk dörtte biri 5, elli beşte biri 4, yüz onda biri 2 ve iki yüz yirmide biri 1'dir. Bu bölenler toplandığında ise iki yüz seksen dört eder. Ve bu iki sayıdan her birinin, burada saydıklarımız dışında başka hiçbir tam böleni yoktur." (Kütâhî, VI, vr. 184b-185a)

Ardından Sâbit b. Kurre Teoremi'ni verir:

"إذا اجتمعت زوج الزوج والواحد معها واجتمع عدد أوّل بشرط أن يكون إذا زيد عليها آخرها ونقص الذي قبله كان المبلغ بعد الزيادة والباقي بعد النقصان أوّليا. ونضرب المبلغ المزيد عليه في الذي بقي. ثمّ نضرب ما اجتمع في العدد الموجود أوّلا الذي له حبيب، و حبيبة العدد الذي يكون من زيادتة مجموع الزائد والناقص المذكورين ضربها في آخر المجموعات على العدد الموجود أوّلا الذي له حبيب، وهما متحابّان."

> "Eğer bir çiftin çifti sayı (2'nin kuvveti) ve onunla birlikte bir (1) sayısı toplanırsa ve toplam asal olursa şu şartla ki bu toplamın son terimi bu toplama eklenir ve ondan önceki terimi bu toplamdan çıkarılırsa, bu eklemeden elde edilen toplam ile çıkarıldıktan sonra kalan sayı asal olmalıdır, bu durumda bu ekleme sonucu elde edilen sayı ile çıkarma sonrası elde kalan sayı çarpılır. Daha sonra bu çarpım, başlangıçta bulunan ve bir dostu olan sayıyla çarpılır. Ve bu işlem sonucunda elde edilen sayının dostu, söz konusu artan ve azalan sayıların toplamının son terimle çarpımıyla dostu olan sayının toplamından elde edilir. Bu iki sayı birbirini sever (yani dost sayılardır). (Kütâhî, VI, vr. 185a)

Her iki paragraf da İbn Sînâ'nın *Şifâ* eserinin matematik bilimler bölümünden alınmış görünmektedir (İbn Sînâ, 1975, s. 28). Bununla birlikte Kütâhî'nin eserinin istinsahında çeşitli imla ve kelime hataları bulunur.[3] Mahmoud Annaby'nin (2023) ilgili makalesinde bu anlatının sembolik hali şöyle açıklanır (s. 3-4):

Çiftin çifti sayıların bir ile toplamı:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1 = m_{n+1}$$

Bu toplamın son terimle toplamı ve sondan bir önceki terimle farkı:

[3] Bu hatalardan anlamı bozduğu tespit edilenler alıntıda düzeltilmiştir.

$m_{n+1} + 2^n = 2^{n+1} - 1 + 2^n = 3 \times 2^n - 1 = b_n$

$m_{n+1} - 2^{n-1} = 2^{n+1} - 1 - 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-1} - 1 = a_n$

a_n, b_n ve m_{n+1} asal sayılar olsunlar. Bu durumda

Son terimle a_n ve b_n'in çarpımı

$2^n \times a_n \times b_n = r_n$

ile a_n ve b_n'in toplamıyla son terimin çarpımı ve r_n in toplamı

$2^n(a_n + b_n) + r_n = s_n$

dost sayılardır.

Sâbit b. Kurre Teoremi'ni Roshdi Rashed'in neşrinden ise şöyle okuruz:

> "Birden başlayarak ardışık sayıların iki katı oranında ilerlediğini varsayalım; bu sayılar a, b, c, d, e olsun. Bu sayıları, mükemmel sayıları belirlerken yaptığımız gibi, bir de dahil olmak üzere, ardışık şekilde toplamaya devam edelim. g sayısı, a, b, c, d, e sayıların toplamı olsun. Bu toplama, eklenen sayıların sonuncusu olan e'yi ekleyelim ve bunların toplamı h sayısı olsun. g'den, e'den önce gelen d sayısını çıkaralım ve geriye kalan miktar i sayısı olsun. Eğer hem h hem de i sayıları ikiden farklı asal sayılar ise, aradığımız şey budur. Eğer değilse, eklemeye devam ederiz, ta ki iki asal sayı elde edene kadar.
>
> Şimdi, diyelim ki h ve i asal sayılar ve hiçbiri iki değil. Bunlardan birini diğerine çarpalım, çarpım k olsun. k'yı, eklenen sayıların sonuncusu olan e ile çarpalım, çarpım R olsun. Böylece elimizde, aklımızda tutacağımız bir sayı olmuş olur.
>
> Benzer şekilde, iki katı oranıyla ilerleyen sayı dizisinde e'den sonraki sayıyı, j, eklenen sayıların sondan bir öncekisi olan c ile toplayalım ve toplam m olsun; bu m'yi j ile çarpalım ve çarpım n olsun, ardından bundan 1 çıkaralım. Kalan s sayısı olsun. Eğer s asal bir sayıysa, işte aradığımız sayı budur. Eğer değilse, yukarıda bahsedilen sayılarla birlikte asal sonuçlar verene kadar eklemeye devam ederiz. Diyelim ki s asal bir sayı oldu; o zaman bu s'yi e ile çarpalım ve çarpım O olsun. Derim ki, R ve O sayıları iki dost sayıdır."

Bu anlatıyı sembollerle ifade edelim.

2'nin kuvvetleri olarak artan bir geometrik dizi farz edelim:

$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ \ldots,\ a_n = 2^n$

Dizinin toplamı g olsun:

$g = 2^{n+1} - 1$

Aşağıdaki üç sayının asal olduğunu farz edelim:

- $h = g + a_n = 3 \cdot 2^n - 1$
- $i = g - a_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$
- $s = a_{n+1} \cdot (a_{n+1} + a_{n-2}) - 1 = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$
- $a_{n+1} = 2a_n$

Bu durumda

$R = h \cdot i \cdot a_n, \qquad O = s \cdot a_n$

sayıları dost sayılardır.

Dost sayılarla ilgili ilk örnekleri verip Sâbit b. Kurre Teoremi'ni zikrettikten sonra Kütâhî, teoremi ispatlamak için on adet ispatın gerekli olduğunu söyler. Bu on ispattan kasıt Sâbit b. Kurre'nin teoremini ispatlamak için kullandığı dokuz önerme ve ispatı ile teoremin kendi ispatıdır. Fakat Kütâhî makalesine bu önermelerin sadece üçünü dahil etmiş ve bu üç önermenin geometrik ispatlarını vermiştir. Çalışmanın bu bölümünde Kütâhî'nin anlatısı izlenerek Sâbit b. Kurre Teoremi'nin ispatında gerekli önermeler incelenecek, boşluklar ise Sâbit b. Kurre'nin kendi risalesinden tamamlanacaktır.

"كل عدد مسطح ضلعاه عددان أوّلان فليس يعده عدد آخر غيرهما"

(Kütâhî, VI, vr. 185a)

Önerme 1: *İki asal sayının çarpımı olarak yazılan bir sayının bu iki asal sayıdan başka böleni yoktur.*[4]

Yani;

$n = p_1 \cdot p_2$

ise, D, n nin bölenlerinin kümesi olmak üzere

$D = \{p_1, p_2\}$

İspat: a sayısı b ve c asal sayılarının çarpımı şeklinde yazılsın. Önermede iddia edilenin aksine b ve c'den farklı d sayısı da a sayısını bölsün. Bu durumda $a = d \cdot e$ olacak şekilde bir e sayısı vardır. Öyleyse

$a = b \cdot c$

ve

$a = d \cdot e$

eşitliklerinden

$b \cdot c = d \cdot e$

bulunur. b asal sayı olduğundan d veya e sayılarından birini bölmelidir. Diyelim ki d sayısını bölsün. Yukarıdaki eşitlikten

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{e}$$

bulunur. b sayısı d sayısını böldüğünden e sayısı da c sayısını böler. Ayrıca $e \neq c$ olmalıdır. Zira eğer böyle olmasa $b = d$ olmalıdır ki, bu kabülümüze terstir. Fakat c sayısı asal sayıdır. Öyleyse ondan farklı ve onu bölen bir e sayısının olması mümkün değildir. Dolayısıyla a sayısı b ve c asal sayılarının dışında herhangi başka bir sayı tarafından bölünmez.[5] Böylece ispat tamamlanmıştır.

[4] Metin "bu iki asal sayıdan başka bir sayı bu sayıyı saymaz" olarak tercüme edilebilirse de "bir sayıyı saymak" günümüz dilinde "o sayıyı bölmek" ifadesine denktir. Makalede anlaşılır olması niyetiyle "saymak" yerine "bölmek" kelimesi kullanılmıştır. Burada bölenden kasıt 1'den büyük bölenlerdir.

[5] Kütâhî'nin eserinde her ne kadar bu ispatı Sâbit b. Kurre'nin risalesinden kopya edilse de, müellif yahut müstensih sayıları göstermek için kullanılan harfleri karıştırmıştır. Dolayısıyla *Feraidu'l-funûn*'daki ispat hatalı görünmektedir.

"كل أعداد متوالية على نسبة الضعف كما كانت فإن العدد الأكثر منها يزيد على جملة الأعداد الباقية مجموعة مثل أقلّها. وكذلك إن كان أقلّها الوحدة."

(Kütâhî, VI, vr. 185a)

Önerme 2: 2*’nin kuvvetleri şeklinde artan bir sayı dizisinde son terim geri kalan tüm terimlerin toplamından, en küçük terim kadar fazladır. En küçük terim 1 olduğunda da aynıdır.*

$$S = \sum_{r=0}^{m} 2^r \cdot k$$

olmak üzere

$2^{m+1} \cdot k - S = k$

$k = 1$ ise

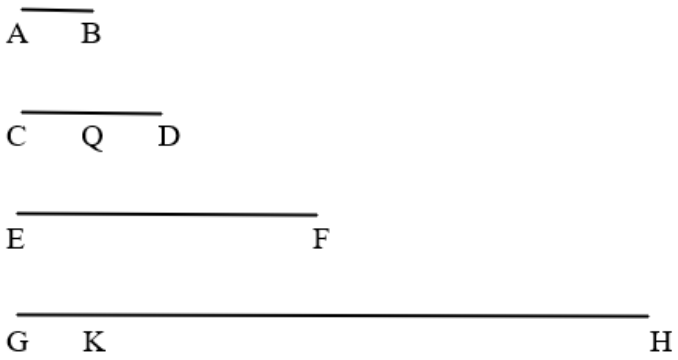
$S = 2^{m+1} - 1$

İspat: 2’nin kuvvetleri şeklinde artan dizi

AB, CD, EF, GH

uzunlukları olsun, öyle ki AB en kısa ve GH en uzun parça olsun. GH uzunluğu geri kalan AB, CD, EF uzunluklarının toplamından AB kadar fazladır. Zira;

CD uzunluğundan AB kadar eksiltildiğinde kalan QD olsun. GH uzunluğundan AB kadar eksiltildiğinde kalan KH olsun. İkinciden kalan olan QD’nin birinci olan AB’ye oranı, sonuncudan kalan KH’nin AB, CD, EF’nin toplamına oranı gibidir.[6] (Şekil 1)



Şekil 1

Yani

$$\frac{QD}{AB} = \frac{KH}{AB + CD + EF}$$

$CD = 2AB$ olduğundan

$QD = CD - AB = AB$

olur. Öyleyse

$KH = AB + CD + EF$

olmalıdır. Böylece

[6] Bu oranın neyin sonucu olarak bulunduğu açık değildir.

$GH = AB + KH = AB + (AB + CD + EF)$

bulunur.[7] Böylece ispat tamamlanmıştır.

Tanım: Kendisi hariç bölenleri toplamı kendisine eşit olan sayıya *mükemmel sayı* denir. Kendisi hariç bölenleri toplamı kendisinden büyük olan sayıya *artık sayı*, küçük olan sayıya ise *eksik sayı* denir.

"إذا جمعت أعداد منوالية على نسبة الضعف من الواحد مع الواحد فكانت منها جملة ما، ثمّ ضرب في العدد الأكثر من الأعداد الّتى جمعت عدد أوّل غير الإثنين، فإنّ العدد المتولّد من ذلك إن كان العدد الأوّل متساويا للجملة الّتي جمعت عدد تامّ أوّل كان العدد الأوّل أقل من الجملة الّتي جمعت فهو عدد زائد وإن كان العدد الأوّل أكثر من الجملة التي جمعت فهو عدد ناقص. ومبلغ زيادته إن كان زائد نقصانه إن كان نقصان مثل فضل تلك الجملة التي جمعت وذلك العدد الأوّل."

(Kütâhî, VI, vr. 185b)

Önerme 3: 1*'den başlayan ve* 2*'nin kuvvetleri şeklinde artan bir sayı dizisinde tüm terimleri toplarsak, sonra dizinin son terimini* 2*'den farklı bir asal sayı ile çarparsak, elde edilen çarpım, eğer asal sayı dizinin toplamına eşitse, mükemmel sayıdır; eğer asal sayı dizinin toplamından küçükse, artık sayıdır; eğer asal sayı dizinin toplamından büyükse, eksik sayıdır. Artık veya eksik sayı olduğunda artık veya eksik miktarı dizinin toplamı ile asal sayı arasındaki farka eşittir.*

Yani;

$1, 2, 2^2, \dots, 2^m$ bir sayı dizisi ve p bir asal sayı olmak üzere

$2^m \cdot p$

i. Mükemmel sayıdır, eğer $p = 2^{m+1} - 1$

ii. Artık sayıdır, eğer $p < 2^{m+1} - 1$

iii. Eksik sayıdır, eğer $p > 2^{m+1} - 1$

ve $\phi(n)$, n sayısının bölenleri toplamı olmak üzere;

i. $2^m \cdot p - \phi(2^m \cdot p) = 2^{m+1} - 1 - p$, eğer $p < 2^{m+1} - 1$
ii. $\phi(2^m \cdot p) - 2^m \cdot p = p - (2^{m+1} - 1)$, eğer $p > 2^{m+1} - 1$

İspat: 2'nin kuvvetleri şeklinde artan bir sayı dizisi

$1, b, c, d, e$

ve toplamları f sayısı olsun. g, 2'den farklı bir asal sayı ve g ile dizinin en büyük terimi e nin çarpımı h olsun. Yani

$1 + b + c + d + e = f$

ve

$g \cdot e = h$

i. $g = f$ ise h mükemmel sayıdır.
ii. $g < f$ ise h artık sayıdır.
iii. $g > f$ ise h eksik sayıdır.

[7] Kütâhî'nin eserinde bu ispatta da harfler karışmış ve satırlar atlanmıştır.

iv. Ayrıca $\phi(n)$, n sayısının bölenleri toplamı olmak üzere

i. $h - \phi(h) = f - g$, eğer $g < f$
ii. $\phi(h) - h = g - f$, eğer $g > f$

Bunun ispatı şöyledir:

g sayısı ile b, c, d sayılarının çarpımı sırasıyla q, k, l olsun. h sayısı bileşik sayı e ile asal sayı g'nin çarpımıdır. Öyleyse h sayısının bölenleri e, g sayıları ile e sayısını bölen sayılar ve e sayısını bölen sayılar ile g nin çarpımından oluşan sayılardır.

Fakat e sayısını bölen sayılar b, c, d sayılarıdır, zira b, c, d, e sayıları 2'nin kuvvetleri şeklinde artar. Öyleyse h sayısının bölenlerinin kümesi

$D = \{1, e, g, b, c, d, q, k, l\}$

g, q, k, l sayılarının her biri diğerlerinden farklıdır. Aynı şekilde $1, b, c, d, e$ sayılarının her biri diğerlerinden farklıdır. Ayrıca g, q, k, l sayıları onlara karşılık gelen $1, b, c, d, e$ sayılarından farklıdır. Örneğin $k$sayısı ona karşılık gelen c sayısına eşit olsa

$$\frac{k}{g} = \frac{c}{1}$$

olduğundan $c = 1$ bulunur, ki bu mümkün değildir.

k sayısı ona karşılık gelenden önceki bir sayıya, mesela b sayısına eşit olsa

$$\frac{k}{q} = \frac{b}{1}$$

olduğundan $q = 1$ bulunur, ki bu mümkün değildir.

k sayısı ona karşılık gelenden sonraki bir sayıya, mesela d sayısına eşit olsa

$$\frac{k}{g} = \frac{d}{b}$$

olduğundan $g = b$ bulunur. Halbuki g, 2'den farklı bir asal sayıdır, b ise 2'nin bir kuvvetidir. Dolayısıyla bu durum da mümkün değildir.

$1, b, c, d, e$ sayıları 2'nin kuvvetleri şeklinde arttığından g, q, k, l, h sayılarının birbirine oranı $1, b, c, d, e$ sayılarının birbirine oranı gibidir. Ayrıca g, q, k, l, h sayıları da 2'nin kuvvetleri şeklinde artar.

g, q, k, l sayılarının toplamı h sayısından g kadar eksiktir (Önerme 2). Yani

$g + q + k + l = h - g$

h sayısının tüm bölenlerinin toplamı

$\phi(h) = 1 + e + g + b + c + d + q + k + l = f + h - g$

olur. Eğer

i. $g = f$ ise $\phi(h) = h$ ve böylece h mükemmel sayı olur.
ii. $g < f$ ise $\phi(h) > h$ ve böylece h artık sayı olur. Ayrıca $\phi(h) - h = f - g$ sağlanır.
iii. $g > f$ ise $\phi(h) < h$ ve böylece h eksik sayı olur. Ayrıca $h - \phi(h) = g - f$ sağlanır.

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Sâbit b. Kurre Teoremi'ni ispatlamak için bunlardan başka altı adet önermeye daha ihtiyaç vardır. Kütâhî makalesinde bunlardan bahsetmez. İspatın bütünlüğü için bu önermeleri aşağıda zikrediyoruz:

Önerme A: *Bir asal sayı ve bir bileşik sayının çarpımı olarak yazılan bir sayının bölenleri bu asal sayı ve bileşik sayı ile bileşik sayıyı bölen tüm sayılar ve bileşik sayıyı bölen sayıların asal sayı ile çarpımlarıdır.*

Yani, $n = p \cdot c$, p asal ve c bileşik olmak üzere, n'nin bölenlerinin kümesi

$D = \{x : x = p \vee x = c \vee x|c \vee (x = py \wedge y|c)\}$

Bu önerme, Önerme 3'ün ispatında kullanılır.

Önerme B: *İki bileşik sayının çarpımı olarak yazılan bir sayının bölenleri bu iki bileşik sayı ile bu sayıları bölen sayılar ve bu bölenlerin birbirleriyle çarpımıdır.*

Yani $n = a \cdot b$ ve a, b bileşik sayılar olmak üzere, n'nin bölenlerinin kümesi

$D = \{x : x = a \vee x = b \vee x|a \vee x|b \vee (x = yz \wedge y|a \wedge z|b)\}$

Önerme C: 1*'den başlayan ve* 2*'nin kuvvetleri şeklinde artan bir sayı dizisinde tüm terimleri toplarsak, sonra dizinin son terimini* 2*'den farklı iki asal sayı ile çarparsak, elde edilen çarpım artık veya eksik sayı olur. Eğer iki asal sayının çarpımı, dizinin terimlerinin toplamı ile iki asal sayının toplamının çarpımından küçük ise çarpım artık sayıdır, büyük ise eksik sayıdır.*
Yani,

$1, 2, 2^2, \dots, 2^m$ bir sayı dizisi ve p_1, p_2 bir asal sayılar olmak üzere

$2^m \cdot p_1 \cdot p_2$

i. Artık sayıdır, eğer $p_1 \cdot p_2 < (2^{m+1} - 1)(p_1 + p_2)$
ii. Eksik sayıdır, eğer $p_1 \cdot p_2 < (2^{m+1} - 1)(p_1 + p_2)$

Ayrıca eşitsizliğin iki tarafındaki değerlerin arasındaki fark artık veya eksik değere eşittir.

Önerme D: 2*'nin kuvvetleri oranında artan dört ardışık sayıdan oluşan dizide üçüncü sayı, üçüncü ve dördüncü sayının toplamı ve üçüncü ve ikinci sayının toplamının çarpımı, üçüncü sayı, dördüncü sayı ve dördüncü ve birinci sayının toplamının çarpımına eşittir.*

Yani

$a, 2a, 4a, 8a$

Dizisi söz konusu olduğunda

$4a \cdot (4a + 8a) \cdot (4a + 2a) = 4a \cdot 8a \cdot (8a + a)$

olur.

Önerme E: 2*'nin kuvvetleri oranında artan dört ardışık sayıdan oluşan dizide üçüncü sayı ve ikinci, dördüncü sayılar ile üçüncü sayının iki katının toplamının çarpımı dördüncü sayı ve birinci ile dördüncü sayıların toplamının çarpımına eşittir.*

Yani

$a, 2a, 4a, 8a$

dizisi söz konusu olduğunda

$4a \cdot (2a + 8a + 2 \times 4a) = 8a \cdot (a + 8a)$

Önerme F: 2*'nin kuvvetleri oranında artan dört ardışık sayıdan oluşan dizide, sonuncunun, birinci ve sonuncunun toplamının bir eksiğiyle çarpımı, üçüncünün, sonuncu ile birinci ve sonuncunun çarpımının bir eksiği ve dördüncü ile üçüncünün toplamının bir eksiği ile üçüncü ve ikincinin toplamının bir eksiği arasındaki farkı ile çarpımına eşittir.*

Yani

$a, 2a, 4a, 8a$

dizisi söz konusu olduğunda

$$8a \cdot (8a + a - 1) = 4a \cdot [8a \cdot (8a + a) - 1][(8a + 4a - 1) - (4a + 2a - 1)]$$

(Qurra, s. 34-50).

Kütahî bu altı önermeyi makalesine dâhil etmediği gibi Sâbit b. Kurre Teoremi'nin ispatına da değinmemiştir. Üçüncü önermeyi verdikten sonra düşman sayılar olarak tanımladığı bir sayı cinsine geçmiş, bu sayıların mistik özelliklerinden ve bazı örneklerinden bahsetmiştir. Fakat düşman sayılar anlaşıldığı kadarıyla bir teoriye dayanmaktan ziyade, folklorik ve kültürel inanışlarla alakalıdır. Örnek olarak çift sayılar ile tek sayıların düşman oldukları belirtilmiştir.

Dost sayılar bölümü ilk on iki sayının, nümerik, mistik, folklorik ve kültürel özellikleri ile son bulur. Örnek olarak, 1 sayının aslıdır ve hem çift sayıları hem de tek sayıları böler. Ayrıca ilk akla işaret eder. 2 ilk tam sayıdır ve çift sayıları böler, gece ve gündüze işaret eder. 3 ilk tek sayıdır ve üçün katlarını böler, cism, ruh ve nefse işaret eder. 4 ilk tamkare sayıdır ve dört tabiata işaret eder. 5 ilk döner sayıdır, yani kendisiyle çarpılınca kendine döner ve beş vakit namaza işaret eder. 6 ilk mükemmel sayıdır ve altı yöne işaret eder. 7 ilk kâmil sayıdır, yani ilk tek sayıyla ikinci çift sayının toplamına ve ilk çift sayıyla ikinci tek sayının toplamına eşittir; yedi göğe işaret eder. 8 ilk eksik sayıdır; ayrıca ilk tamküp sayıdır; cennetin sekiz kapısına işaret eder. 9 ilk tek tamkare sayıdır ve dokuz feleğe işaret eder. Bu şekilde 12 sayısına kadar örnekler verilir (Kütâhî, VI, 187a-187b.). Böylece dost sayılar bölümü son bulur.[8]

2. Sonuç

Bu çalışma, dost sayıların İslam matematik geleneği içindeki izlerini sürerek hem Sâbit b. Kurre'nin teoreminin matematiksel yapısını hem de Abdullah Kütâhî'nin *Feraidu'l-funûn* adlı eserinde bu teoremin nasıl aktarıldığını incelemiştir. Bulgular, İslam matematik tarihinde dost sayıların yalnızca sembolik anlamlar taşımadığını, aynı zamanda sistematik sayı üretimi, asal sayı ilişkileri ve ispat yöntemleri bakımından özgün bir matematiksel çerçeve sunduğunu göstermektedir.

Sâbit b. Kurre'nin ortaya koyduğu teorem, modern sayı kuramının temel kavramlarıyla karşılaştırıldığında, asal sayıların kombinatorik düzenine ve geometrik dizi kavramına dayalı bir erken dönem algoritmik düşünme biçimi olarak değerlendirilebilir. Kütâhî'nin bu teoremi *Feraidu'l-funûn*'da yeniden ele alışı ise, 18. yüzyıl Osmanlı dünyasında matematiksel bilgilerin klasik kaynaklardan nasıl devralınıp yeniden üretildiğini göstermektedir. Ancak Kütâhî'nin ispat zincirini tamamlamayıp yalnızca üç önermeye yer vermesi, Kütâhî'nin eserinin pratik ve derlemeci yönünü de ortaya koyar. Bu yönüyle çalışma *Feraidu'l-funûn* gibi ansiklopedik eserlerde matematiksel bilginin kaynak metinlerden nasıl aktarıldığına bir örnek oluşturur.

Öte yandan Abdullah Kütâhî'nin *Feraidu'l-funûn*'daki anlatımı, dönemin folklorik bilgi birikimini yansıtır ve dost sayıların sadece teorik değil, aynı zamanda dinî, mistik ve ahlaki anlamlar

[8] Sayıların ezoterik manaları hususen bu makalenin konusu dışında tutulmuştur. Zira bu bir matematik tarihi makalesidir ve matematiği rasyonel bir bilim olarak ele alır, sayıların kültürel anlamları ise antropolojik ve okült araştırmaların konusudur. Bununla birlikte orijinal metnin bütünlüğünü korumak adına Kütâhî'nin bahsettiği anlamların bir özeti verilmiştir.

yüklenerek nasıl işlevselleştirildiğini ortaya koyar. Eserde yer verilen sayısal sembolizm, matematiksel düşüncenin toplumun zihinsel-kültürel evreniyle nasıl iç içe geçtiğini gösteren önemli bir örnektir. Bu çerçevede çalışma hem matematik tarihi hem de bilimsel düşüncenin kültürel bağlamı üzerine yapılacak araştırmalar için bir zemin sunmaktadır.

Kaynakça

Annaby, M. (2023). On the extraction of amicable pairs between Ibn Sina-al-Baghdadi and al-Kashi. *arXiv preprint arXiv:2302.12891*

Brentjes, S, & Hogendijk, J. P. (1989). Notes on Thabit ibn Qurra and his rule for amicable numbers. *Historia Mathematica, 16*, 373-378.

Dickson, L. E. (1919). *History of the theory of numbers, Volume I: Divisibility and primality*. Carnegie Institution.

Hogendijk, J. P. (1985). Thabit ibn Qurra and the pair of amicable numbers 17296, 18416. *Historia Mathematica, 12*(3), 269-273.

İbn Sînâ. (1975). *Şifâ el-Fennu's-sânî fî'l-riyâdiyyât, el-hisâb 2*. Mazhar, A. L. (nşr.) General Egyptian Book Organization.

Kütâhî, Abdullah. *Feraidu'l-funûn* c.6. Ankara Milli Kütüphane, 06 Mil Yz A 1339/3, 184a-187b.

Rashed, R. & Houzel, C. (2009). Theorie des nombres amiables. Rashed, R. (Ed.). *Thābit ibn Qurra Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*. de Gruyter.

Rashed, R. (1994). *The Developement of Arabic mathematics between arithmetic and algebra*. (A. Armstrong, Çev.) Springer.

Sâbit b. Kurre. *Kitabu'l-aʿdâdi'l-mutehâbbe*. Süleymaniye Kütüphanesi Ayasofya 4830/6, 110a-121b; Paris, Bibliothèque nationale, 2457, 170a-180b.

Thabit Ibn Qurra. (1977). *Amicable numbers*. Saidan, A. S. (nşr.) Jordan University.